

LA POTENZA.

Definizione:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Proprietà:

1. $a^0 = 1$	6. $(a^n)^k = a^{n \cdot k}$
2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$	7. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
3. $a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}$	8. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
4. $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$	9. $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$
5. $\frac{a^n}{a^k} = a^n \cdot a^{-k} = a^{n-k}$	10. $a^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}}$

N. B. Le prime otto proprietà accanto indicate valgono $\forall a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\forall n, k \in \mathbb{R} - \{0\}$, mentre le proprietà 9 e 10 valgono $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\forall n, k \in \mathbb{N}$. Ricordiamo che \mathbb{R} = insieme dei numeri reali e $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ = insieme dei numeri naturali. Facciamo notare, infine, che una forma del tipo 0^0 è indeterminata.

IL LOGARITMO.

Definizione: Si dice **logaritmo in base a** (con $a > 0$ ed $a \neq 1$) di un numero positivo x l'**esponente da assegnare alla base a** per ottenere il numero x stesso.

In simboli: $\log_a x$:

$a^{\log_a x} = x$

Inoltre:

$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

N. B. Il numero x è detto **argomento** del logaritmo.

Se la base a è sottintesa si intende $a = e$ (numero di Nepero) e si scrive: $\log x$ oppure $\ln x$.

Il numero di Nepero è: $e \cong 2,72$.

Le proprietà seguenti sono valide per $a > 0$ e $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, se non diversamente specificato.

Proprietà:

1. $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$	6. I $\log_a a = 1$	6. II $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$	7. $\log_a (a^k) = k$	
3. $\log_a (b^k) = k \cdot \log_a b$ <small>con $k \in \mathbb{R} - \{k: k = \pm 2n, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$ ossia: k non pari positivo, né pari negativo.</small>	8. $\log_a \left(\frac{1}{b}\right) = \log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$	
4. $\log_a (b^k) = k \cdot \log_a b $ <small>con $k \in \{k: k = \pm 2n, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$ ossia: k pari positivo o pari negativo e $b \in \mathbb{R}$.</small>	9. $\log_{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{b}\right) = \log_a b$	
5. $\log_a \sqrt[n]{b^k} = \log_a \left(b^{\frac{k}{n}}\right) = \frac{k}{n} \cdot \log_a b$ <small>con $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} - \{1\}$</small>	10. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (Cambiamento di base)	